管理类联考初数高频公式汇总

第一章　算术

一、有理数和无理数

1. ① 有理数+/−无理数=无理数　　② 有理数（非零）×/÷无理数=无理数

若a，b为有理数，λ为无理数，$a+b\lambda=0$，则$a=b=0$。

2. 无理数估值

π	e	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{6}$	$\sqrt{7}$	$\sqrt{8}$	$\sqrt{10}$
3.14	2.72	1.41	1.73	2.24	2.45	2.65	2.83	3.16

3. 分子/分母有理化

① $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\dfrac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$　　$\sqrt{a}-\sqrt{b}=\dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

② $\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$　　$\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}$

二、整数

（一）整除

1. 能被2（或5）整除的数：末一位数字能被2（或5）整除

2. 能被3（或9）整除的数：各位数的数字之和能被3（或9）整除

3. 能被11整除的数：奇位数字之和与偶位数字之和的差是11的倍数

（二）奇数与偶数

1. 运算性质

① 同偶异奇（+/−）	② 遇偶则偶（×/÷）
I. 若干个整数相加之和为奇数，则奇数的个数为奇数 II. 若m、n均为整数，则$m+n$与$m-n$奇偶性相同	I. 若干个整数相乘之积为奇数，则这些数全为奇数 II. 若n^k、$\sqrt{n}$、$\lvert n\rvert$都为整数，则其奇偶性与n相同

（三）质数与合数

1. 40以内的质数：2，3，5，7，11，13，17，19，23，29，31，37

2. 2是唯一的偶质数

（四）公约数与公倍数

3. 设 m ， n 均为正整数，则 $m\times n=[m,n]\times(m,n)$

（五）完全平方数

1. 常用完全平方数

11^2	12^2	13^2	14^2	15^2	16^2	17^2	18^2	19^2
121	144	169	196	225	256	289	324	361

三、比例

1. 等比定理：$\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\cdots=\dfrac{a_n}{b_n}\Leftrightarrow\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}=\dfrac{a_i}{b_i}$ （ $b_1+b_2+\cdots+b_n\neq0$ ）

2. 倒比定理：$\dfrac{1}{x}:\dfrac{1}{y}:\dfrac{1}{z}=a:b:c\Leftrightarrow x:y:z=\dfrac{1}{a}:\dfrac{1}{b}:\dfrac{1}{c}$

四、绝对值

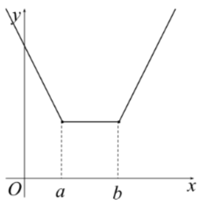
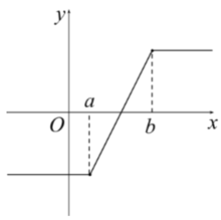
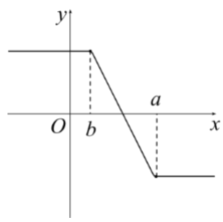
1. 等价性：$|a|^2=a^2$（或 $\sqrt{a^2}=|a|$）

2. 非负定零：若 $\sqrt{a}+|b|+c^{2n}=0$（ $n\in Z^+$ ），则 $a=b=c=0$

3. 三角不等式：$||a|-|b||\le|a\pm b|\le|a|+|b|$

<table>
<tr><td>等号成立条件</td><td>$||a|-|b||\le|a+b|\le|a|+|b|$
$ab\le0$ $ab\ge0$</td><td>$||a|-|b||\le|a-b|\le|a|+|b|$
$ab\ge0$ $ab\le0$</td></tr>
</table>

4. 绝对值函数图像

<table>
<tr><td rowspan="2">函数</td><td rowspan="2">$y=|x-a|+|x-b|$ 型</td><td colspan="2">$y=|x-a|-|x-b|$ 型</td></tr>
<tr><td>$a<b$</td><td>$a>b$</td></tr>
<tr><td>图像</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>性质</td><td>凹槽型；
$y_{\min}=|a-b|$，无最大值</td><td colspan="2">“Z”字型；
$y_{\min}=-|a-b|$， $y_{\max}=|a-b|$</td></tr>
</table>

第二章　整式与分式

一、代数式

（一）常用因式分解/乘法公式

1. 平方差公式：$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

2. 完全平方公式：$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$

3. 完全平方公式变式：$a^2+b^2+c^2\pm ab\pm bc\pm ca=\frac{1}{2}\left[(a\pm b)^2+(b\pm c)^2+(c\pm a)^2\right]$

4. 三个数和的平方：$a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=(a+b+c)^2$

5. 立方和公式：$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

6. 立方差公式：$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

7. 完全立方公式：$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$

（二）整式除法

1. 余式定理：$f(x)=g(x)h(x)+r(x)$，若存在a使得$g(a)=0$，则$f(a)=r(a)$

2. 因式定理：$f(x)=g(x)h(x)$，若存在a使得$g(a)=0$，则$f(a)=0$

（三）常用裂项相消公式

1. $\dfrac{1}{x(x+k)}=\dfrac{1}{k}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+k}\right)$

2. $\dfrac{1}{(2x-1)(2x+1)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2x-1}-\dfrac{1}{2x+1}\right)$

3. $\dfrac{1}{x(x+1)(x+2)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x(x+1)}-\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}\right)$

4. $\dfrac{1}{\sqrt{x+k}+\sqrt{x}}=\dfrac{1}{k}\left(\sqrt{x+k}-\sqrt{x}\right)$

（四）$x+\dfrac{1}{x}=a$ 型

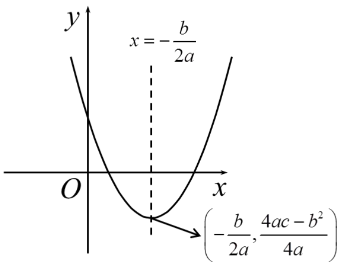
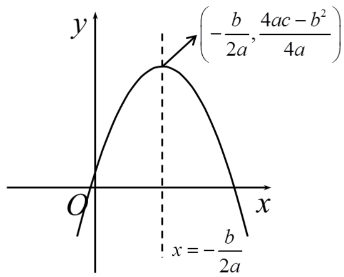
1. $x^{2n}+\dfrac{1}{x^{2n}}=\left(x^n+\dfrac{1}{x^n}\right)^2-2$

2. $x^{2n+1}+\dfrac{1}{x^{2n+1}}=\left(x^n+\dfrac{1}{x^n}\right)\left(x^{n+1}+\dfrac{1}{x^{n+1}}\right)-\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$

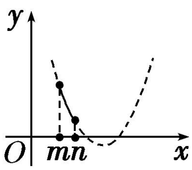
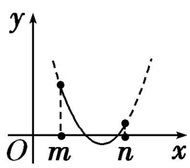
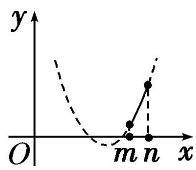
二、函数

（一）一元二次函数

1. 图像与性质

	$y=ax^2+bx+c$（$a\neq0$）	
a	$a>0$	$a<0$
图像		
奇偶性	$b=0$时，偶函数；$b\neq0$时，非奇非偶函数	
单调性	在区间$\left(-\infty,-\frac{b}{2a}\right]$单调递减 在区间$\left[-\frac{b}{2a},+\infty\right)$单调递增	在区间$\left(-\infty,-\frac{b}{2a}\right]$单调递增 在区间$\left[-\frac{b}{2a},+\infty\right)$单调递减

2. 区间最值

对称轴与区间	$m<n<-\frac{b}{2a}$	$m<-\frac{b}{2a}<n$	$-\frac{b}{2a}<m<n$
图像			
最值	$f(x)_{\max}=f(m)$ $f(x)_{\min}=f(n)$	$f(x)_{\max}=\max\{f(n),f(m)\}$ $f(x)_{\min}=f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	$f(x)_{\max}=f(n)$ $f(x)_{\min}=f(m)$

（二）指、对数函数

指数运算法则	对数运算法则
① $a^0=1\,(a\neq 0)$ ② $a^x\cdot a^y=a^{x+y}$ ③ $a^x\div a^y=a^{x-y}$ ④ $(a^x)^y=a^{xy}$ ⑤ $a^x\cdot b^x=(ab)^x$	① $\log_a 1=0$，$\log_a a=1$ ② $\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y$ ③ $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right)=\log_a x-\log_a y$ ④ $\log_{a^x}(b^y)=\dfrac{y}{x}\log_a b$

四、一元二次方程

1. 求根公式：$x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

2. 根的判定：$\Delta=b^2-4ac$

①$\Delta<0$时，无实根；②$\Delta=0$时，有两个相等实根；③$\Delta>0$时，有两个不等实根

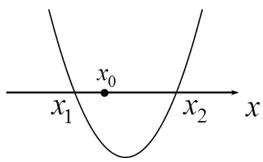
3. 韦达定理：$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a} \\ x_1x_2=\dfrac{c}{a} \end{cases}$

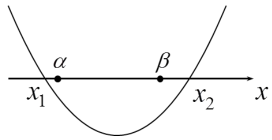
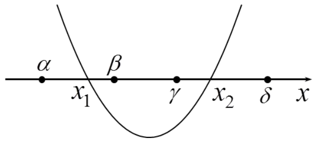
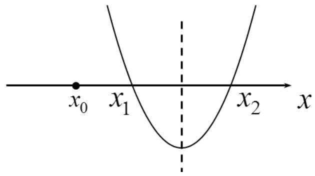
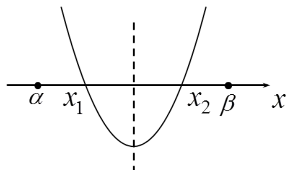
①$\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{x_1+x_2}{x_1x_2}$　　②$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$

③$\dfrac{1}{x_1^2}+\dfrac{1}{x_2^2}=\dfrac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{x_1^2x_2^2}$　　④$|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$

⑤$x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)(x_1^2-x_1x_2+x_2^2)=(x_1+x_2)\left[(x_1+x_2)^2-3x_1x_2\right]$

4. 根的分布

根的分布	图像	结论
根在点两侧 $x_1<x_0<x_2$		$af(x_0)<0$

根在区间两侧 $x_1<\alpha<\beta<x_2$		$\begin{cases}af(\alpha)<0\\af(\beta)<0\end{cases}$
两根分别在两个区间 $\alpha<x_1<\beta\le\gamma<x_2<\delta$		$\begin{cases}f(\alpha)f(\beta)<0\\f(\gamma)f(\delta)<0\end{cases}$
两根在点同侧 $x_0<x_1<x_2$		$\begin{cases}\Delta\ge0\\-\dfrac{b}{2a}<x_0\\af(x_0)>0\end{cases}$
两根在区间内 $\alpha<x_1<x_2<\beta$		$\begin{cases}\Delta\ge0\\\alpha<-\dfrac{b}{2a}<\beta\\af(\alpha)>0\\af(\beta)>0\end{cases}$

五、特殊方程

1. 分式方程求解步骤：①同乘最简公分母；②验证增根

2. 有理方程求解步骤：（1）①同时平方；②验证取值范围（2）换元

3. 绝对值方程求解方法

$\lvert f(x)\rvert=a$ （$a\ge0$）型	$\lvert f(x)\rvert=g(x)$ 型	$\lvert f(x)\rvert=\lvert g(x)\rvert$ 型
$f(x)=\pm a$	$\begin{cases}f(x)=\pm g(x)\\g(x)\ge0\end{cases}$	$f(x)=\pm g(x)$

六、不等式

（一）一元二次不等式

1. 求解方法：二次项系数为正时，大于号取两端，小于号取中间

2. 不等式恒成立问题：（注意二次项系数是否为零）

① $f(x)\ge0$ 在 $x\in R$ 上恒成立 $\Leftrightarrow\begin{cases}a>0\\\Delta\le0\end{cases}$　　② $f(x)\le0$ 在 $x\in R$ 上恒成立 $\Leftrightarrow\begin{cases}a<0\\\Delta\le0\end{cases}$

（二）分式不等式

$\dfrac{f(x)}{g(x)}>0 \Leftrightarrow f(x)\cdot g(x)>0$	$\dfrac{f(x)}{g(x)}\ge 0 \Leftrightarrow f(x)\cdot g(x)\ge 0$ 且 $g(x)\ne 0$
$\dfrac{f(x)}{g(x)}<0 \Leftrightarrow f(x)\cdot g(x)<0$	$\dfrac{f(x)}{g(x)}\le 0 \Leftrightarrow f(x)\cdot g(x)\le 0$ 且 $g(x)\ne 0$

（三）无理不等式

$\sqrt{f(x)}>\sqrt{g(x)}$	$\sqrt{f(x)}>g(x)$	$\sqrt{f(x)}<g(x)$
$\begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)\ge 0 \\ f(x)>g(x) \end{cases}$	$\begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)\ge 0 \\ f(x)>[g(x)]^2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} f(x)\ge 0 \\ g(x)<0 \end{cases}$	$\begin{cases} f(x)\ge 0 \\ g(x)>0 \\ f(x)<[g(x)]^2 \end{cases}$

（四）绝对值不等式

$\vert f(x)\vert\le a$	$\vert f(x)\vert\le g(x)$	$\vert f(x)\vert\ge a$	$\vert f(x)\vert\ge g(x)$
$-a\le f(x)\le a$	$-g(x)\le f(x)\le g(x)$	$f(x)\ge a$ 或 $f(x)\le -a$	$f(x)\ge g(x)$ 或 $f(x)\le -g(x)$

（注：$a>0$、$g(x)>0$）

（五）高次不等式

①系数化正；②因式分解；③穿根法（右上到左下，奇穿偶不穿）；④选取解集

四、均值不等式

※利用均值不等式求最值要注意一正二定三相等。

1. 常考形式为：① $a+b\ge 2\sqrt{ab}$；② $ab\le\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$；③ $a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc}$

第四章　数列

一、等差数列与等比数列基本公式

	等差数列	等比数列
定义	$a_{n+1}-a_n=d$	$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=q$ （$q\neq 0$）
中项公式	$2b=a+c$	$b^2=ac$
通项公式	$a_n=a_1+(n-1)d$	$a_n=a_1q^{n-1}$
通项推广	若 $a_n=\alpha n+\beta$，则 $\begin{cases}a_1=\alpha+\beta\\ d=\alpha\end{cases}$	—
求和公式	$S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d$	$S_n=\begin{cases}na_1, & q=1\\ \dfrac{a_1-a_nq}{1-q}=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}, & q\neq 1\end{cases}$
求和推广	若 $S_n=An^2+Bn$，则 $\begin{cases}a_1=A+B\\ d=2A\end{cases}$	若 $\begin{cases}S_n=Ak^n+B\\ A+B=0\end{cases}$，则 $\begin{cases}a_1=Ak+B\\ q=k\end{cases}$
位项定差（比）	$a_n=a_m+(n-m)d\Rightarrow d=\dfrac{a_n-a_m}{n-m}$	$a_n=a_m\cdot q^{n-m}\Rightarrow q^{n-m}=\dfrac{a_n}{a_m}$
基本性质		
性质一	$n+m=k+l\Rightarrow a_n+a_m=a_k+a_l$	$n+m=k+l\Rightarrow a_na_m=a_ka_l$
性质二	S_n，$S_{2n}-S_n$，$S_{3n}-S_{2n}$ 是公差为 n^2d 的等差数列	S_n，$S_{2n}-S_n$，$S_{3n}-S_{2n}$ 是公比为 q^n 的等比数列
性质三	A_n、B_n 分别为等差数列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 的前 n 项和，则 $\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{A_{2n-1}}{B_{2n-1}}$	—

二、等差数列最值

已知通项 $a_n=\alpha n+\beta$，求 S_n 的最值	已知 $S_n=An^2+Bn$，求 S_n 的最值
令 $a_n=\alpha n+\beta=0$，则： I. 若 n 为整数，则最值为 $S_n=S_{n-1}$； II. 若 n 为小数，则最值为 $S_{[n]}$。	对称轴 $n=-\frac{B}{2A}$，则： I. 若 $-\frac{B}{2A}$ 为正整数，则最值为 $S_{-\frac{B}{2A}}$； II. 若 $-\frac{B}{2A}$ 为小数，则在接近 $-\frac{B}{2A}$ 的整数部分取得最值。

第五章　几何

➢　平面几何

一、三角形

（一）面积

$$S=\frac{1}{2}ah=\frac{1}{2}ab\sin C==\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

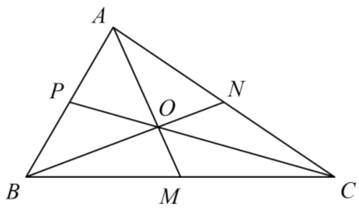
其中 $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$， h 为 a 边上的高， $\angle C$ 为 a,b 两边的夹角.

常用角度正弦值：

角度	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°
正弦值	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

（二）五线四心

1. 中线及重心



重心分三条中线为长度 $2:1$ 的两段；

三角形的三条中线把三角形分成面积相等的六个部分；

中线定理： $AB^2+AC^2=\frac{1}{2}BC^2+2AM^2$ 。

2. 角平分线及内心

若 AD 为 $\angle BAC$ 的角平分线，则 AD 上点 P 到 AB 、 AC 的垂线段长相等；

三角形内角平分线把对边分成两部分，其长度之比等于另外两边长度之比；

内心：若已知三角形边长为 a,b,c ，面积为 S ，则有 $\frac{S}{a+b+c}=\frac{r}{2}$ 。

3. 中垂线及外心

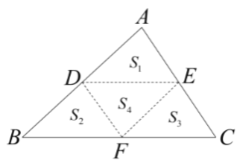
若 PD 为线段 BC 的垂直平分线，则 PD 上的点 P 到 B 、 C 的距离相等；

外心：若已知三角形边长为 a,b,c ，面积为 S ，则其外接圆半径为 $\frac{abc}{S}=4R$ 。

4. 垂线及垂心

从三角形的顶点向其对边或对边的延长线作垂线段，称为该对边上的高。三角形三边上的高或它们的延长线相交于一点，称为三角形的垂心。

5. 中位线



三角形的中位线平行且等于第三边的一半，即图中 $DE \underline{\underline{/\!/}} \frac{1}{2}BC$ ；

若 D 为 AB 中点， $DE /\!/ BC$ ，则 E 为 AC 中点；

三角形的三条中位线把三角形分成四个全等的三角形

（三）特殊三角形

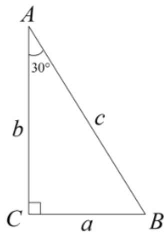
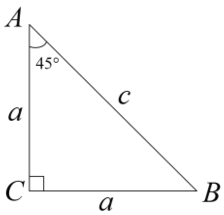
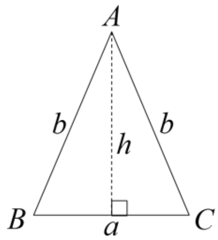
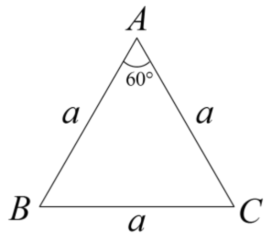
1. 直角三角形

（1）面积公式：$S=\frac{1}{2}ab$

（2）勾股定理：$c^2=a^2+b^2$，常见勾股数：$(3,4,5)$、$(6,8,10)$、$(5,12,13)$

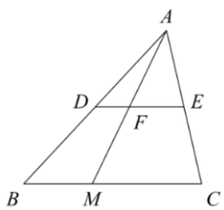
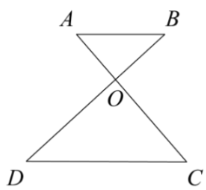
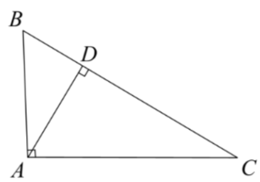
（3）直角三角形中斜边上中线的长度等于斜边长的一半

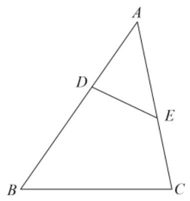
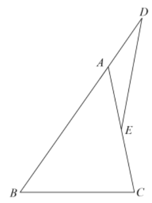
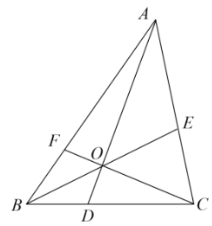
2. 特殊角/边三角形

$30°$ 直角三角形	$45°$ 直角三角形	等腰三角形	等边三角形
			
$a:b:c=1:\sqrt{3}:2$	$a:b:c=1:1:\sqrt{2}$	两腰相等	三边相等
$S=\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$	$S=\frac{1}{2}a^2=\frac{1}{4}c^2$	$S=\frac{1}{2}ah$	$S=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$
-	四线合一	四线合一	四心重合

（四）三角形相似

1. 常见相似模型

模型	A 字模型	8 字模型	射影定理
条件	$DE // BC$	$AB//CD$	$AB\perp AC$，$AD\perp BC$
图形			

相似三角形	$\Delta ADF \backsim \Delta ABM$ $\Delta AFE \backsim \Delta AMC$ $\Delta ADE \backsim \Delta ABC$	$\Delta AOB \backsim \Delta COD$	$\Delta ABD \backsim \Delta CAD \backsim \Delta CBA$
模型	共角模型		燕尾定理
	两角相等	两角互补	
图形			
结论	$\dfrac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta ADE}}=\dfrac{AB\times AC}{AD\times AE}$		$\dfrac{S_{\Delta ABO}}{S_{\Delta ACO}}=\dfrac{BD}{DC}$

二、四边形

1. 性质：内角和为$360°$，任意四边形连接各边中点所得四边形为平行四边形，其面积为原四边形的$\dfrac{1}{2}$

2. 面积计算公式：①平行四边形：$S=ah$；②矩形：$S=ab$；③正方形：$S=a^2$；

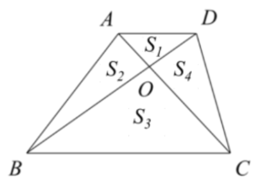
④菱形：$S=\dfrac{1}{2}ab$（a,b为对角线长）；⑤梯形：$S=\dfrac{(a+b)h}{2}$

3. 梯形蝴蝶定理

① $S_1\times S_3=S_2\times S_4$

② $S_2=S_4$

③ $S_1:S_3:S_2:S_4=a^2:b^2:ab:ab$



三、圆与扇形

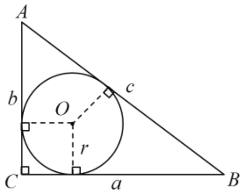
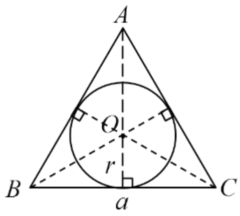
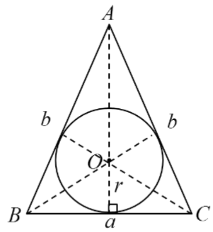
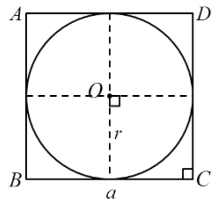
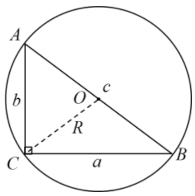
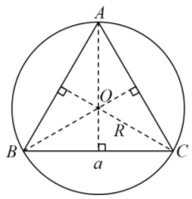
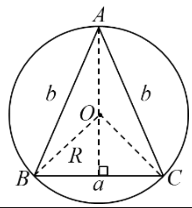
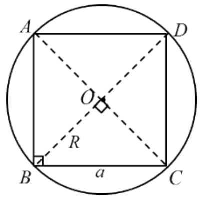
1. 圆：①面积：$S=\pi r^2$；②周长：$l=2\pi r$

扇形：①面积：$S=\dfrac{\alpha\pi r^2}{360°}$；②弧长：$l=\dfrac{\alpha\pi r}{180°}$

2. 垂径定理：垂直于弦的直径平分这条弦，并且平分弦所对的弧

3. 圆周角定理：圆周角的度数等于它所对弧上的圆心角度数的一半，同弧或等弧所对的圆周角相等，直径所对的圆周角是直角。

4. 内切圆与外接圆

	直角三角形	等边三角形	等腰三角形	正方形
内切圆				
公式	$r=\dfrac{a+b-c}{2}$	$r=\dfrac{a}{2\sqrt{3}}$	$h=\sqrt{b^2-\left(\dfrac{a}{2}\right)^2}$	$r=\dfrac{a}{2}$
外接圆				
公式	$R=\dfrac{c}{2}$	$R=\dfrac{a}{\sqrt{3}}$	$h=\sqrt{b^2-\left(\dfrac{a}{2}\right)^2}$	$R=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$

➢ **空间几何体**

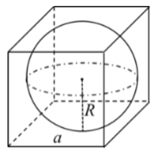
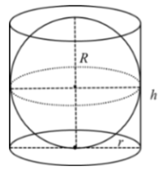
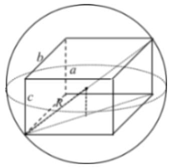
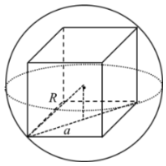
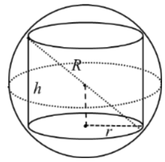
一、常用公式

长方体	圆柱体	球体
体对角线：$l=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ 表面积：$S=2(ab+bc+ac)$ 体积：$V=abc$	侧面积：$S=2\pi rh$ 全面积：$S=2\pi rh+2\pi r^2$ 体积：$V=\pi r^2h$	表面积：$S=4\pi r^2$ 体积：$V=\dfrac{4}{3}\pi r^3$

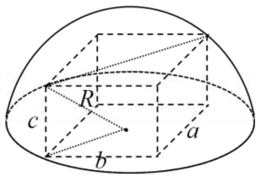
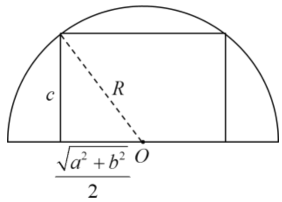
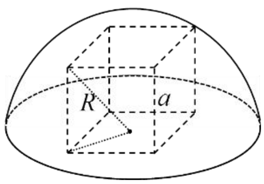
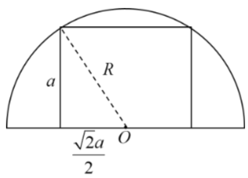
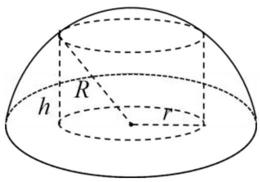
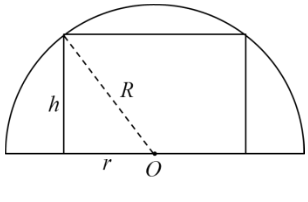
二、组合体

1. 球的外切与内接

	长方体	正方体	圆柱体
体对角线	$l=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$	$l=\sqrt{3}a$	$l=\sqrt{(2r)^2+h^2}$
内切球		$2R=a$	$2r=h=2R$ （当轴截面是正方形时才存在）

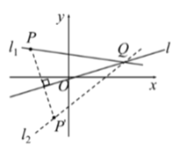
			
外接球	$2R=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$	$2R=\sqrt{3}a$	$2R=\sqrt{(2r)^2+h^2}$
			

2. 半球的内接

类型	图形	切面图形	公式
长方体			$R^2=c^2+\dfrac{a^2+b^2}{4}$
正方体			$R=\dfrac{\sqrt{6}}{2}a$
圆柱体			$R^2=h^2+r^2$

➢ 解析几何

一、常用公式

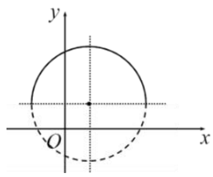
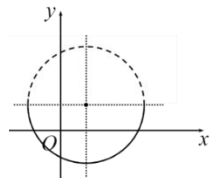
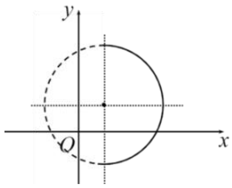
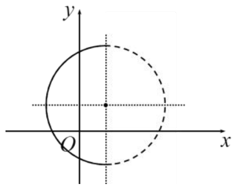
<table>
<tr><td rowspan="2">点</td><td>两点间的距离公式</td><td colspan="2">$|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$</td></tr>
<tr><td>中点坐标公式</td><td colspan="2">$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$</td></tr>
<tr><td rowspan="5">直线</td><td>斜截式</td><td colspan="2">$y=kx+b$</td></tr>
<tr><td>点斜式</td><td colspan="2">$y-y_0=k(x-x_0)$</td></tr>
<tr><td>截距式</td><td colspan="2">$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$</td></tr>
<tr><td>两点式</td><td colspan="2">$\frac{y-y_2}{y_1-y_2}=\frac{x-x_2}{x_1-x_2}$</td></tr>
<tr><td>一般式</td><td colspan="2">$Ax+By+C=0$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">点与直线</td><td>点到直线的距离公式</td><td colspan="2">$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">两点关于直线对称</td><td>一般求解</td><td>$\begin{cases} A\times\frac{x_1+x_2}{2}+B\times\frac{y_1+y_2}{2}+C=0 \\ \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\times\left(-\frac{A}{B}\right)=-1 \end{cases}$</td></tr>
<tr><td>经验公式</td><td>$\begin{cases} x_2=x_1-2A\frac{Ax_1+By_1+C}{A^2+B^2} \\ y_2=y_1-2B\frac{Ax_1+By_1+C}{A^2+B^2} \end{cases}$</td></tr>
<tr><td rowspan="5">直线与直线</td><td>两直线平行</td><td colspan="2">$k_1=k_2 \Leftrightarrow A_1B_2-A_2B_1=0\ (C_1\neq C_2)$</td></tr>
<tr><td>两直线垂直</td><td colspan="2">$k_1\cdot k_2=-1 \Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2=0$</td></tr>
<tr><td>平行线间的距离</td><td colspan="2">$d=\frac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">直线关于直线对称</td><td>一般求解
（两点确定一条直线）</td><td>
</td></tr>
<tr><td>经验公式</td><td>$\frac{ax+by+c}{Ax+By+C}=\frac{2aA+2bB}{A^2+B^2}$</td></tr>
<tr><td>直线与抛物线</td><td colspan="3">联立抛物线与直线方程$\begin{cases} y=ax^2+bx+c \\ y=kx+m \end{cases}\Rightarrow ax^2+(b-k)x+c-m=0$</td></tr>
</table>

	无交点	$\Delta<0$
	相交	$\Delta>0$
	相切	$\Delta=0$
圆	圆的标准方程	$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$
	圆的一般方程	$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$
点与圆	点到圆上点的最远距离	$D_{\max}=r+d$
	点到圆上点的最近距离	$D_{\min}=\|r-d\|$

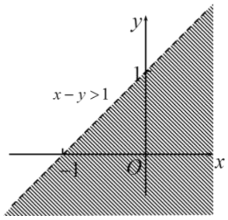
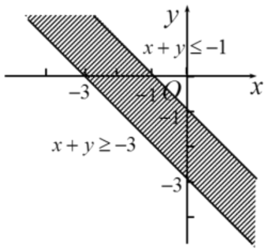
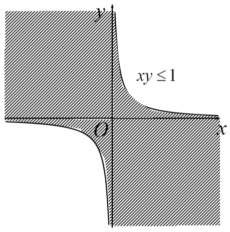
直线与圆	相离	几何条件	代数条件
		$d>r$	$\Delta<0$
	相切	$d=r$	$\Delta=0$
	相交	$d<r$	$\Delta>0$

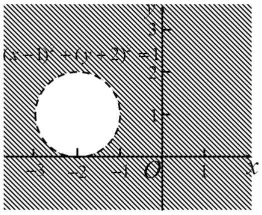
直线与圆	圆关于直线对称		（1）对称圆圆心 (x_2,y_2) 与已知圆心 (x_1,y_1) 关于直线 l 对称 （2）两圆半径相同，即 $r_1=r_2$
	切线方程	切点在圆上	（1）当 $x^2+y^2=r^2$ 时，切线方程为 $ax+by=r^2$； （2）当 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$ 时，切线方程为 $(a-x_0)(x-x_0)+(b-y_0)(y-y_0)=r^2$
		切点在圆外	利用圆心到直线的距离等于半径求 k 值 （k 求出一解时，另一切线斜率不存在）

圆与圆	位置关系	外离	外切	相交	内切	内含
	关系式	$d>r_1+r_2$	$d=r_1+r_2$	$\|r_1-r_2\|<d<r_1+r_2$	$d=\|r_1-r_2\|$	$0\le d<\|r_1-r_2\|$
	内公切线	2	1	0	0	0
	外公切线	2	2	2	1	0

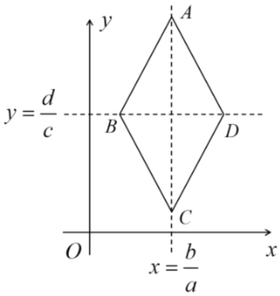
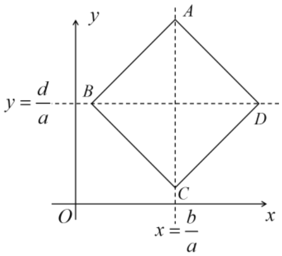
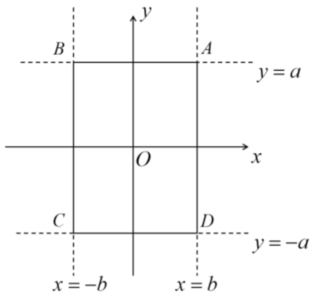
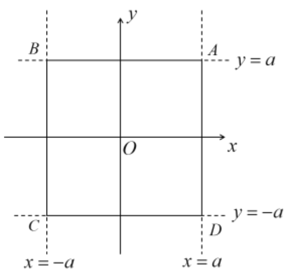
<table>
<tr><td rowspan="6">半圆方程</td><td>上半圆</td><td>下半圆</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$y-y_0=\sqrt{r^2-(x-x_0)^2}$</td><td>$y-y_0=-\sqrt{r^2-(x-x_0)^2}$</td></tr>
<tr><td>右半圆</td><td>左半圆</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$x-x_0=\sqrt{r^2-(y-y_0)^2}$</td><td>$x-x_0=-\sqrt{r^2-(y-y_0)^2}$</td></tr>
</table>

二、常见多元不等式区域

<table>
<tr><th>类型</th><th>常见表达式</th><th>区域</th></tr>
<tr><td rowspan="4">直线型</td><td>$Ax+By+C\le 0$</td><td rowspan="4"></td></tr>
<tr><td>$Ax+By+C<0$</td></tr>
<tr><td>$Ax+By+C\ge 0$</td></tr>
<tr><td>$Ax+By+C>0$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">绝对值</td><td>$|Ax+By+C|\le D$</td><td rowspan="4"></td></tr>
<tr><td>$|Ax+By+C|<D$</td></tr>
<tr><td>$|Ax+By+C|\ge D$</td></tr>
<tr><td>$|Ax+By+C|>D$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">反比例</td><td>$xy\le A$</td><td rowspan="4"></td></tr>
<tr><td>$xy<A$</td></tr>
<tr><td>$xy\ge A$</td></tr>
<tr><td>$xy>A$</td></tr>
</table>

圆	$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\le r^2$	
	$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2< r^2$	
	$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\ge r^2$	
	$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2> r^2$	

三、常见绝对值函数图像

曲线方程	图形	中心坐标	面积
菱形 $\lvert ax-b\rvert+\lvert cy-d\rvert=e$		$\left(\frac{b}{a},\frac{d}{c}\right)$	$S=\frac{2e^2}{\lvert ac\rvert}$
正方形 $\lvert ax-b\rvert+\lvert ay-d\rvert=e$		$\left(\frac{b}{a},\frac{d}{a}\right)$	$S=\frac{2e^2}{a^2}$
矩形 $\lvert xy\rvert-a\lvert x\rvert-b\lvert y\rvert+ab=0$ （$a>0$， $b>0$）		$(0,0)$	$S=4ab$
正方形 $\lvert xy\rvert-a\lvert x\rvert-a\lvert y\rvert+a^2=0$		$(0,0)$	$S=4a^2$

四、解析几何最值问题

1. 斜率型：$\frac{y-b}{x-a} \Rightarrow$ 设 $k=\frac{y-b}{x-a}$，求动点 (x,y) 与定点 (a,b) 确定的直线斜率的取值范围；

2. 截距型：$ax+by \Rightarrow$ 设 $z=ax+by$，即 $y=-\frac{a}{b}x+\frac{z}{b}$，求动直线截距的取值范围；

3. 距离型：$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} \Rightarrow$ 设 $d=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$，求动点 (x,y) 与定点 (a,b) 之间的距离的取值范围。

第六章　数据分析

一、计数原理

（一）排列数组合数基本公式

① $A_n^m = n(n-1)\cdots(n-m+1)$； ② $A_n^n = n(n-1)(n-2)\cdots 3\times 2\times 1 = n!$； ③ $A_n^0 = 1$，$A_n^1 = n$	① $C_n^m = \dfrac{A_n^m}{A_m^m} = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m(m-1)\cdots 3\times 2\times 1}$； ② $C_n^m = C_n^{n-m}$； ③ $C_n^0 = C_n^n = 1$，$C_n^1 = n$

（二）二项式定理

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + \cdots + C_n^k a^{n-k} b^k + \cdots + C_n^{n-1} a^1 b^{n-1} + C_n^n a^0 b^n$$

① 通项：第 $k+1$ 项为 $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$；

② 令 $a=1$，$b=1$，可得 $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n$；

令 $a=1$，$b=-1$，可得 $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 \cdots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 \cdots = 2^{n-1}$。

（三）排序问题

基本原理应用	计数原理综合应用问题	加法、乘法原理
	元素允许重复的排列问题	n^m
特殊位置	限定位置问题	优先法
	相邻问题	捆绑法
	不相邻问题	插空法
分组问题	相同元素分组问题	隔板法
	不同元素分组问题	逐组挑选
错排	错排问题	应用结论
其他	计数对象较少的计数问题	穷举法
	规律性较强的计数问题	归纳法

1. 不同元素的分组问题

①不均匀分组问题：将不同元素分成若干组，若各组内元素数均不相同，则采用逐组挑选法。

②均匀分组问题：将不同元素分成若干组，若有 k 个组内元素数相同，则在逐组挑

选法基础上除以$k!$，消除重复。

2. 相同元素分给不同对象，采用隔板法进行求解：

将n个相同元素分给m个不同对象，每个对象至少分1个，则方法数为C_{n-1}^{m-1}；

将n个相同元素分给m个不同对象，每个对象至少分2个，则方法数为C_{n-m-1}^{m-1}；

将n个相同元素分给m个不同对象，分得数量可以为0个，则方法数为C_{n+m-1}^{m-1}。

3. 常用错排数

元素个数	2	3	4	5	6
方法数	1	2	9	44	265

二、概率

（一）概率基本公式

1. 对任意事件A、B，则$P(A-B)=P(A)-P(AB)$

2. 对任意事件A、B，则$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

3. 对任意事件A、B、C，则

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)$$

4. 若事件A与事件B互斥，则

$$P(A\bigcup B)=P(A)+P(B) \quad \Rightarrow \text{ 概率的加法公式}$$

5. 若事件A和事件B相互独立，则

$$P(AB)=P(A)P(B) \quad \Rightarrow \text{ 相互独立事件的乘法公式}$$

6. 若相互独立事件A或B至少发生一件，则概率为$P(A\bigcup B)=1-P(\bar{A})P(\bar{B})$。

（二）古典概型及伯努利概型

1. 古典概率的计算：$P(A)=\dfrac{A\text{包含的基本事件的个数}}{\text{基本事件的总数}}$

2. 伯努利概型的概率公式

若在一次试验中事件 A 发生的概率为 p，不发生的概率为 $1-p$，则在 n 次伯努利试验中事件 A 恰好发生了 k 次的概率为

$$P_n^k = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \qquad (k=0,1,2\cdots n)$$

三、数据描述

1. 平均值：$\overline{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$

2. 方差：① $S^2 = D(x) = \dfrac{1}{n}[(x_1-\overline{x})^2 + (x_2-\overline{x})^2 + \cdots + (x_n-\overline{x})^2]$

② $S^2 = D(x) = \dfrac{x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} + \cdots + x_n^{\ 2}}{n} - \overline{x}^2$

③ 连续 5 个整数的方差为 2

3. 标准差：$S = \sqrt{D(x)} = \sqrt{\dfrac{1}{n}[(x_1-\overline{x})^2 + (x_2-\overline{x})^2 + \cdots + (x_n-\overline{x})^2]}$

4. 若 $x_1, x_2 \cdots x_n$ 的平均值是 $\overline{x}$，方差是 D，标准差是 d，则 $ax_1+b, ax_2+b, \cdots, ax_n+b$ 的平均值是 $a\overline{x}+b$，方差是 a^2D，标准差是 $|a|d$。

第七章　应用题

一、行程问题

1. 直线/环形相遇追及问题

类别 \ 线性	相遇问题		追及问题	
	单次	多次（n次）	单次	多次（n次）
直线型	$(v_1+v_2)t=s$	$(v_1+v_2)t=(2n-1)s$	$(v_1-v_2)t=s$	无
环形	$(v_1+v_2)t=s$	$(v_1+v_2)t=ns$	$(v_1-v_2)t=s$	$(v_1-v_2)t=ns$

2. 行船问题

$v_{顺}=v_{静}+v_{水}$；$v_{逆}=v_{静}-v_{水}$

3. 列车问题

	火车过定点	火车过定线段	火车过动点	火车过动线段
相遇问题	$vt=l$	$vt=l+L$	$(v_1+v_2)t=l$	$(v_1+v_2)t=l_1+l_2$
追及问题			$(v_1-v_2)t=l$	$(v_1-v_2)t=l_1+l_2$

二、工程问题

1. 基本公式：工程量 = 工效×时间

①总工效 = 各个单位工效之和

②工程总量 = 各个单位完成的工程量之和

三、增长率问题

1. 增长率：$\beta=\dfrac{b-a}{a}=\dfrac{b}{a}-1$

2. 典型问题

求终值	求平均增长率
①已知各次增长率时： $b=a(1+\beta_1)(1+\beta_2)\cdots(1+\beta_n)$ ②已知平均增长率时： $b=a(1+\beta)^n$	①已知各次增长率时： $\beta=\sqrt[n]{(1+\beta_1)(1+\beta_2)\cdots(1+\beta_n)}-1$ ②已知初始值及终值时： $\beta=\sqrt[n]{\dfrac{b}{a}}-1$

四、浓度问题

1. 基本公式：$浓度=\frac{溶质量}{溶液量}\times100\%=\frac{溶质量}{溶质量+溶剂量}\times100\%$

2. 置换问题

①原溶液有V升，浓度为ρ，倒出m升后，再加入m升水，则浓度变为$\frac{V-m}{V}\cdot\rho$；

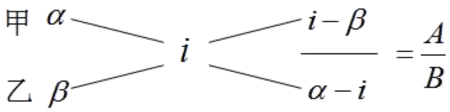
②原溶液有V升，浓度为ρ，倒出m_1升后，再加入m_1升水，倒出m_2升后，再加入m_2升水，……，倒出m_n升后，再加入m_n升水，则浓度变为$\left(\frac{V-m_1}{V}\right)\left(\frac{V-m_2}{V}\right)\cdots\left(\frac{V-m_n}{V}\right)\cdot\rho$；

③原溶液有V升，浓度为ρ，倒出m升后，再加入m升水，此过程重复n次，则浓度变为$\left(\frac{V-m}{V}\right)^n\cdot\rho$。

3. 溶液配制问题——平均量混合问题

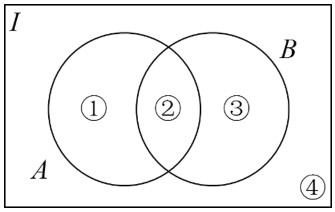
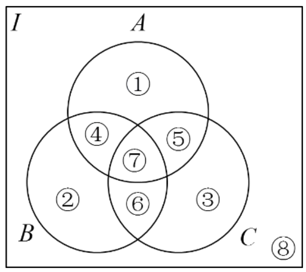
甲平均量为α，甲总量为A；乙平均量为β，乙总量为B；

混合后平均量为i，总量为$A+B$



常见平均量：浓度、速度、平均年龄、平均分、单价

五、容斥问题（结合文氏图记忆）

常考形式	4. 两者容斥	5. 三者容斥
文氏图		
公式	$A\cup B=A+B-A\cap B$	$A\cup B\cup C=一层+仅两层相交+三层相交$ $A\cup B\cup C=A+B+C-仅两层相交-2\times三层相交$ $A\cup B\cup C=A+B+C-A\cap B-A\cap C-B\cap C+A\cap B\cap C$